ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 26, № 134 2021

DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-134-130-142
УДК 517.952, 517.955

Условия разрешимости в аналитическом виде дескрипторной системы уравнений в частных производных

Абдулфтах Хосни МОХАМАД
ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет»
394036, Российская Федерация, г. Воронеж, Университетская пл., 1

Solvability conditions in the analytical form of a descriptor system of partial differential equations

Abdulftah H. MOHAMAD
Voronezh State University
33 University Sq., Voronezh 394036, Russian Federation

Аннотация. Рассматривается система дифференциально-алгебраических уравнений в частных производных первого порядка в банаховом пространстве с постоянными вырожденными операторами в случае регулярного операторного пучка. В таком случае исходная система при некотором дополнительном условии расщепляется на вырожденные подсистемы в непересекающихся подпространствах для поиска проекций исходной неизвестной функции в подпространствах. Выявляются условия согласования для параметров систем. Построено решение рассматриваемой системы дифференциально-алгебраических уравнений.

Ключевые слова: банахово пространство, дифференциально-алгебраические уравнения, фредгольмов оператор, дескрипторная система

Для цитирования: *Мохамад А.Х.* Условия разрешимости в аналитическом виде дескрипторной системы уравнений в частных производных // Вестник российских университетов. Математика. 2021. Т. 26. № 134. С. 130–142. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-134-130-142.

Abstract. A system of first-order partial differential-algebraic equations in a Banach space with constant degenerate operators in the case of a regular operator pencil is considered. In this case, under some additional condition, the original system splits into two subsystems in disjoint subspaces in order to search for the projections of the original unknown function in the subspaces. The matching conditions for the parameters of the systems are identified. A solution of the considered system of differential-algebraic equations is constructed.

Keywords: Banach space, differential-algebraic equations, Fredholm operator, descriptor system

Mathematics Subject Classification: 35F40

For citation: Mohamad A.H. Usloviya razreshimosti v analiticheskom vide deskriptornoy sistemy uravneniy v chastnykh proizvodnykh [Solvability conditions in the analytical form of a descriptor system of partial differential equations]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2021, vol. 26, no. 134, pp. 130–142.
DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-134-130-142. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Рассматривается уравнение

$$A\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = B\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} + Cu(t,x) + f(t,x), \tag{0.1}$$

где $A : E_1 \to E_2$, E_1, E_2 — банаховы пространства; A — замкнутый линейный фредгольмов оператор с нулевым индексом и с плотной в E_1 областью определения $domA$, $\overline{dom}A = E_1$; $B, C \in L(E_1, E_2)$, оператор B необратим; $(t,x) \in T \times X$, $T = [0, t_k]$, $X = [0, x_k]$; $f(t,x)$ — заданная достаточно гладкая вектор-функция со значениями в E_2; $u = u(t,x)$ искомая вектор-функция.

Такие уравнения называют *дифференциально-алгебраическими*, или *дескрипторными*, или уравнениями *Соболевского типа*, или уравнениями *не типа Коши–Ковалевской.* Дескрипторная система с оператором А, имеющим число 0 нормальным собственным числом, решена в работе [1]. Исследование уравнения (0.1) можно сопоставить с исследованием уравнения

$$A\frac{dz}{dt} = Bz + f(t), \tag{0.2}$$

с необратимыми коэффициентами A, B, где A — замкнутый линейный оператор действующий в банаховом пространстве E, $B \in L(E, E)$, и с достаточно гладкой вектор-функцией $f(t)$; а решение задачи (0.1) — с решением $z = z(t)$ уравнения (0.2) при начальном условии

$$z(0) = z_0 \in domA. \tag{0.3}$$

Над изучением задачи (0.2), (0.3) активно работают известные школы С. Г. Крейна, С. П. Зубовой, А. Г. Руткаса, Н. А. Сидорова, Г. А. Свиридюка, И. В. Мельниковой, A. Favini. Достаточно полно результаты исследования этой задачи представлены в [2–7].

Дескрипторные системы нашли свое применение при моделировании движения самолетов [8], химических процессов [9], экономических систем [10]. Большое количество работ по дескрипторным системам также относится к теории электрических цепей [11].

В работе [12] проведено обоснование численного метода для решения системы (0.1) с постоянными матрицами коэффициентов с некоторыми граничными условиями.

Наша цель — получить условия, при которых система (0.1) с граничными условиями разрешима в аналитическом виде.

Если оператор пучок $A - \lambda B$, при λ достаточно малых по модулю, является регулярным, то есть оператор $A_\lambda = (A - \lambda B)^{-1}A : domA \to E_1$ имеет число 0 нормальным собственным числом [13], то E_1 разлагается в прямую сумму двух подпространств

$$E_1 = M \oplus N, \tag{0.4}$$

где N — корневое подпространство для A_λ, а M инвариантно относительно A_λ и такое, что сужение $\tilde{A}_\lambda$ оператора A_λ на M имеет обратный оператор $(\tilde{A}_\lambda)^{-1}$.

Сформулируем известные свойства фредгольмовых операторов (см. [14]).

С в о й с т в о 0.1. Пространства E_1 и E_2 расщепляются в прямые суммы [3]

$$E_1 = KerA \oplus CoimA, \quad E_2 = ImA \oplus CokerA, \tag{0.5}$$

где $CoimA$ — прямое дополнение к ядру $KerA$ в E_1, $CokerA$ — дефектное подпространство, $dimKerA = dimCokerA < \infty$. Сужение $\tilde{A}$ оператора A на $CoimA \cap dom(A)$ имеет ограниченный обратный оператор $\tilde{A}^{-1}$. Определим отвечающие разложениям (0.5) проекторы P_0 и Q_0 на $KerA$ и $CokerA$, соответственно, а также оператор $A^- = \tilde{A}^{-1}(I - Q_0)$, называемый полуобратным, $A^- : ImA \to CoimA \cap dom(A)$. Здесь и далее через I обозначен единичный оператор в соответствующем пространстве.

С в о й с т в о 0.2. Уравнение

$$Av = w, \quad v \in E_1 \cap dom(A), \quad w \in E_2, \tag{0.6}$$

эквивалентно системе

$$Q_0 w = 0, \quad v = A^- w + P_0 v \quad \forall P_0 v \in KerA \cap dom(A).$$

Первое равенство в последней системе является условием корректности уравнения (0.6) (см. [3]).

Определим операторы

$$\begin{gathered} A_0 = A, \quad Q_0 = Q, \quad P_0 = P, \quad A_0^- = A^-, \quad T_0 = A_0^- B, \quad S_0 = Q_0 B, \\ A_j = S_{j-1} P_{j-1}, \quad S_j = Q_j S_{j-1} T_{j-1}, \quad T_j = T_{j-1} - A_j^- S_{j-1} T_{j-1} \quad (j = 1, 2, \ldots, p). \end{gathered} \tag{0.7}$$

Операторы P_j и Q_j в (0.7) — это проекторы на $KerA_j$ и $CokerA_j$, отвечающие соответствующим разложениям, $A_j^- = \tilde{A}_j^{-1}(Q_{j-1} - Q_j)$ (см. [3]).

С в о й с т в о 0.3. Цепочки Жордана B-присоединенных элементов оператора A имеют максимальную длину $p < \infty$ тогда и только тогда, когда оператор A_p обратим (описание оператора A_p см. в работах [3, 15, 16]).

С в о й с т в о 0.4. Пучок $(A - \lambda B)$ регулярен в том и только том случае, когда существует $q \in \mathbb{N}$ такое, что оператор A_q обратим (см. [3]). Число p — есть минимальное из таких q. Число 0 является нормальным собственным числом оператора A_λ, при этом выполняется (0.4), где

$$M = \{y \in E_1 : S_i y = 0, \ i = 0, 1, \ldots, p - 1\}. \tag{0.8}$$

Сужение $\tilde{A}_\lambda$ оператора A_λ на M имеет ограниченный обратный оператор $\tilde{A}_\lambda^{-1}$:

$$\tilde{A}_\lambda^{-1} = I - \lambda T_p.$$

С в о й с т в о 0.5. B-присоединенные элементы v_i длины p определяются из соотношений (см. [3]):

$$Av_1 = 0, \quad Av_i = Bv_{i-1} \quad (i = 1, 2, \ldots, p), \tag{0.9}$$

$$S_r v_i = 0 \quad (r + i < p). \tag{0.10}$$

1. Расщепление уравнения

Воспользуемся очевидным равенством $B=\dfrac{1}{\lambda}(\lambda B - A + A)$. Умножение уравнения (0.1) слева на $(A-\lambda B)^{-1}$ приводит к уравнению

$$A_\lambda \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{A_\lambda - I}{\lambda}\frac{\partial u}{\partial x} + (A-\lambda B)^{-1}\big(Cu + f(t,x)\big). \tag{1.1}$$

Поскольку A_λ имеет число 0 нормальным собственным числом, вектор-функция $u(t,x)$, отвечающая разложению (0.4), принимает вид

$$u(t,x) = Qu + Pu, \tag{1.2}$$

где P — проектор на подпространство N, Q — проектор на M. Подстановка соотношения (1.2) в (1.1) дает:

$$\begin{aligned}&A_\lambda \frac{\partial (P+Q)u}{\partial t}\\ &= \frac{A_\lambda - I}{\lambda}\frac{\partial (P+Q)u}{\partial x} + (P+Q)(A-\lambda B)^{-1}C(P+Q)u + (P+Q)(A-\lambda B)^{-1}f(t,x).\end{aligned}$$

Поскольку подпространства N и M инвариантны относительно A_λ, получим, что все слагаемые расщепляются на уравнения в подпространстве M с искомой функцией $Qu(t,x)$ и в подпространстве N с искомой функцией $Pu(t,x)$, кроме слагаемого $(P+Q)(A-\lambda B)^{-1}C(P+Q)u$. Для того чтобы уравнение расщепилось на уравнения в подпространствах M и N, подставим $P(A-\lambda B)^{-1}CQ = \hat{0}$, т. е.

$$(A-\lambda B)^{-1}Cu = Q(A-\lambda B)^{-1}C(Pu+Qu) + P(A-\lambda B)^{-1}CPu, \tag{1.3}$$

где $Q(A-\lambda B)^{-1}C(Pu+Qu) \in M$, $P(A-\lambda B)^{-1}CPu \in N$. Итак, получим уравнение в подпространстве N

$$A_\lambda \frac{\partial Pu}{\partial t} = G\frac{\partial Pu}{\partial x} + P(A-\lambda B)^{-1}\big(CPu + f\big), \quad \text{где} \quad G = \frac{A_\lambda - P}{\lambda}, \tag{1.4}$$

и уравнение в подпространстве M

$$\tilde{A}_\lambda \frac{\partial Qu}{\partial t} = \frac{\tilde{A}_\lambda - Q}{\lambda}\frac{\partial Qu}{\partial x} + Q(A-\lambda B)^{-1}\big(Cu + f\big). \tag{1.5}$$

2. Постановка задачи

Уравнение (0.1) расщепляется на уравнения (1.4), (1.5) в подпространствах N и M соответственно, при условии $P(A-\lambda B)^{-1}CQ = \hat{0}$, каждое из них решается с граничными условиями

$$Pu(t,0) = \psi(t) \in N, \tag{2.1}$$

$$Qu(0,x) = \phi(x) \in M. \tag{2.2}$$

Таким образом, уравнение (0.1) эквивалентно системе, состоящей из алгебраического уравнения (1.2) и двух дифференциальных уравнений (1.4), (1.5), в этом смысле уравнение (0.1) является алгебро-дифференциальным, дескрипторным. Теперь требуется найти решение в корневом подпространстве N, затем подставить его в уравнение дополнительного подпространства M.

3. Решение задачи в корневом подпространстве

Решение системы (1.4), (2.1) является решением в корневом подпространстве. Чтобы описать операторы в уравнении (1.4), примем $dimKerA = 1$. Эти операторы раскладываются на базису $\{v_i,\ i = 1, 2, \ldots, p\}$:

$$Pu(t,x) = \sum_{i=1}^{p} c_i(t,x)v_i, \quad P\psi(t) = \sum_{i=1}^{p} \psi_i(t)v_i, \tag{3.1}$$

$$\tilde{C}(t,x,\lambda) = P(A-\lambda B)^{-1}CPu(t,x) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} a_{ij}c_j(t,x)v_i, \tag{3.2}$$

$$\text{где } \ a_{ij} = a_{ij}(\lambda) \in \mathbb{C}, \quad a_{ij} = 0 \quad \forall i > j,$$

$$(A-\lambda B)^{-1}f(t,x) = F(t,x,\lambda) = \sum_{i=1}^{p} f_i v_i + QF, \quad QF \in M, \tag{3.3}$$

$$P(A-\lambda B)^{-1}f(t,x) = \sum_{i=1}^{p} f_i(t,x,\lambda)v_i, \tag{3.4}$$

$$A_\lambda v_i = -\sum_{k=1}^{i-1} \frac{1}{\lambda^{i-k}} v_k. \tag{3.5}$$

Используя соотношения (3.1)–(3.5), запишем уравнение (1.4) в виде

$$\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial c_i}{\partial x} v_i = \sum_{i=2}^{p} \left(\frac{\partial c_i}{\partial t} - \frac{1}{\lambda}\frac{\partial c_i}{\partial x}\right) \sum_{k=1}^{i-1} \frac{1}{\lambda^{i-k}} v_k + \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} a_{ij}c_j v_i + \sum_{i=1}^{p} f_i v_i.$$

Сравнение в этом равенстве коэффициентов при v_i с одинаковыми индексами приводит к соотношениям

$$\frac{\partial c_p}{\partial x} = \lambda a_{pp}c_p + \lambda f_p, \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial c_i}{\partial x} = \frac{\partial c_{i+1}}{\partial t} + \lambda a_{ii}c_i + \sum_{j=i+1}^{p} (\lambda a_{ij} - a_{i+1j})c_j + (\lambda f_i - f_{i+1}). \tag{3.7}$$

Лемма 3.1. *Функции* $\lambda f_p,\ \ \lambda f_i - f_{i+1},\ \ i = 1, \ldots, p$ *не зависят от* λ.

Доказательство. В силу (3.4) имеем:

$$(A-\lambda B)^{-1}f(t,x) = \sum_{i=1}^{p} f_i v_i + QF,$$

где $QF = Q(A-\lambda B)^{-1}f(t,x)$. Отсюда

$$f(t,x) = \sum_{i=1}^{p} f_i(A-\lambda B)v_i + (A-\lambda B)QF.$$

Используя определение v_i, из (0.9) получаем:

$$f(t,x) = \sum_{i=1}^{p-1} (f_{i+1} - \lambda f_i)Bv_i - \lambda f_p Bv_p + (A-\lambda B)QF,$$

откуда

$$AQF = f(t,x) + \lambda BQF - \sum_{i=1}^{p-1}(f_{i+1} - \lambda f_i)Bv_i + \lambda f_p Bv_p. \tag{3.8}$$

Согласно свойству 0.2 соотношение (3.8) эквивалентно системе

$$\begin{gathered} Q_0 f + \lambda Q_0 BQF - \sum_{i=1}^{p-1}(f_{i+1} - \lambda f_i)Q_0 Bv_i + (\lambda f_p)Q_0 Bv_p = 0, \\ QF = A^- f + \lambda A^- B(QF) - \sum_{i=1}^{p-1}(f_{i+1} - \lambda f_i)A^- Bv_i + \lambda f_p A^- Bv_p + P_0(QF). \end{gathered} \tag{3.9}$$

В первом равенстве этой системы, в силу уравнения (0.8), выполнено

$$\lambda Q_0 BQF = \lambda S_0 QF = 0,$$

а в силу свойства 0.5 выполнено

$$Q_0 Bv_i = S_0 v_i = 0$$

при всех $i = 1, \ldots, p-1$. Поэтому первое равенство принимает вид

$$Q_0 f + (\lambda f_p)Q_0 Bv_p = 0.$$

Поскольку $Q_0 f$ и $Q_0 Bv_p$ не зависят от λ, то и λf_p также не зависит от λ.

Во втором равенстве системы (3.9) $P_0(QF) = 0$, и поэтому это равенство принимает вид

$$QF = \lambda A^- B(QF) - \sum_{i=1}^{p-1}(f_{i+1} - \lambda f_i)A^- Bv_i + A^- f + \lambda f_p A^- Bv_p. \tag{3.10}$$

Применяя S_1 к обеим частям (3.10), в силу свойств 0.4, 0.5 получаем

$$0 = (\lambda f_{p-1} - f_p)A^- BS_1 v_{p-1} + \lambda f_p A^- BS_1 v_p.$$

Слагаемые $\lambda f_p A^- BS_1 v_p$, $A^- BS_1 v_{p-1}$ в правой части полученного уравнения не зависят от λ, следовательно, $(\lambda f_{p-1} - f_p)$ не зависит от λ.

Применяя S_2 к обеим частям (3.10), в силу свойств 0.4, 0.5 получаем

$$0 = (\lambda f_{p-1} - f_p)A^- BS_2 v_{p-1} + (\lambda f_{p-2} - f_{p-1})A^- BS_2 v_{p-2} + \lambda f_p A^- BS_2 v_p.$$

Так как $(\lambda f_{p-1} - f_p)$, λf_p не зависят от λ, то слагаемые $(\lambda f_{p-1} - f_p)A^- BS_2 v_{p-1}$ и $\lambda f_p A^- BS_2 v_p$ в правой части полученного уравнения не зависят от λ. Таким образом, $(\lambda f_{p-2} - f_{p-1})A^- BS_2 v_{p-2}$ не зависит от λ, а следовательно, $(\lambda f_{p-2} - f_{p-1})$ не зависит от λ.

Применяя к обеим частям (3.10) последовательно S_i, $i = 3, \ldots, p-2$, и пользуясь свойствами 0.4, 0.5, получаем что элементы $(\lambda f_j - f_{j+1})$, $j = 1, \ldots, p-3$, также не зависят от λ. □

В силу доказанного утверждения в представлении вектор-функции $P(A - \lambda B)^{-1} f(t,x)$ можно обозначать

$$\lambda f_p = \Phi_p(t,x), \quad \lambda f_i - f_{i+1} = \Phi_i(t,x), \quad i = 1, 2, \ldots, p-1. \tag{3.11}$$

Лемма 3.2. *Элементы* λa_{rr}, $(\lambda a_{ij} - a_{i+1j})$, $r = 1,2,\ldots,p$, $i = 1,2,\ldots,p-1$, $j = i+1, i+2,\ldots,p$, *не зависят от* λ.

Доказательство. Запишем (1.3) в виде

$$Cu = (A-\lambda B)Q(A-\lambda B)^{-1}C(Pu+Qu) + (A-\lambda B)P(A-\lambda B)^{-1}CPu.$$

В силу (3.2) это уравнение эквивалентно уравнению

$$Cu = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} a_{ij}c_j(A-\lambda B)v_i + (A-\lambda B)d_M,$$

где $a_{ij}=0$ при всех $i>j$, $d_M = Q(A-\lambda B)^{-1}Cu$, $u = Pu+Qu$. Согласно (0.9) запишем полученное уравнение в виде

$$A\Bigg(\sum_{i=2}^{p}\sum_{j=1}^{p}(a_{ij}-\lambda a_{i-1j})c_jv_i + d_M\Bigg) = Cu + \lambda a_{pp}c_pBv_p + \lambda Bd_M. \tag{3.12}$$

В силу свойства 0.2, уравнение (3.12) эквивалентно системе

$$\begin{gathered} Q_0Cu + \lambda a_{pp}c_pQ_0Bv_p + \lambda Q_0Bd_M = 0,\\ \sum_{i=2}^{p}\sum_{j=1}^{p}(a_{ij}-\lambda a_{i-1j})c_jv_i = A^{-}Cu + \lambda a_{pp}c_pA^{-}Bv_p - G_M, \end{gathered} \tag{3.13}$$

где $G_M = d_M - \lambda A^{-}Bd_M - P_0\big(\sum_{i=2}^{p}\sum_{j=1}^{p}(a_{ij}-\lambda a_{i-1j})c_jv_i + d_M\big)$.

В первом уравнении системы (3.13) для последнего слагаемого левой части выполнено $Q_0Bd_M = S_0d_M = 0$ (в силу свойства 0.4 подпространства M). А поскольку Q_0Cu, Q_0Bv_p не зависят от λ, то и λa_{pp} не зависит от λ.

В силу свойства 0.4 имеем $P_0d_M = 0$. Поэтому

$$G_M = d_M - \lambda A^{-}Bd_M - P_0\sum_{i=2}^{p}\sum_{j=1}^{p}(a_{ij}-\lambda a_{i-1j})c_jv_i.$$

Умножим это равенство слева A, получим

$$AG_M = (A-\lambda B)d_M.$$

Следовательно, $d_M = A_\lambda G_M$, и, в силу инвариантности подпространства M относительно A_λ, имеем $G_M \in M$. Теперь второе уравнение в системе (3.13) запишем в виде

$$\sum_{i=2}^{p}\sum_{j=1}^{p}(a_{ij}-\lambda a_{i-1j})c_jv_i = -G_M + q(t,x), \tag{3.14}$$

где $q(t,x) = A^{-}Cu + \lambda a_{pp}c_pA^{-}Bv_p$ не зависит от λ. Подействуем на обе части уравнения (3.14) отображением S_0. С учетом свойства 0.5 получим

$$\big(-\lambda a_{p-1p-1}c_{p-1} + (a_{pp}-\lambda a_{p-1p})c_p\big)S_0v_p = -S_0G_M + S_0q(t,x).$$

В силу свойства 0.4 $S_0 G_M = 0$. Далее, $S_0 q(t,x)$ и $S_0 v_p$ не зависят от λ, в результате элементы λa_{p-1p-1}, $(a_{pp} - \lambda a_{p-1p})$ также не зависят от λ.

При применении S_1 слева к обеим частям уравнения (3.14), с учетом свойств 0.4, 0.5 получим, что элементы λa_{p-2p-2}, $(a_{p-1p-1} - \lambda a_{p-2p-1})$, $(a_{p-1p} - \lambda a_{p-2p})$ не зависят от λ. Аналогично, при применении S_i, $i = 1, 2, \ldots, p-2$, слева к обеим частям уравнения (3.14), с учетом свойств 0.4, 0.5 получим, что элементы $\lambda a_{p-i-1p-i-1}$, $(a_{p-ip-j} - \lambda a_{p-i-1p-j})$, $j = 0, 1, \ldots, i$, не зависят от λ. □

Согласно лемме 3.2 можем обозначить

$$\lambda a_{rr} = \gamma_r, \quad (-\lambda a_{ij+1} + a_{i+1j+1}) = -\zeta_{ij+1}, \tag{3.15}$$

где γ_r, ζ_{ij+1} — это числа ($r = 1, \ldots, p$, $i = 1, \ldots, p-1$, $j = i, \ldots, p-1$).

Из (3.11) и (3.15) следует, что система (3.6), (3.7) записывается в виде

$$\frac{\partial c_p}{\partial x} = \gamma_p c_p + \Phi_p, \tag{3.16}$$

$$\frac{\partial c_i}{\partial x} = \frac{\partial c_{i+1}}{\partial t} + \gamma_i c_i + \sum_{j=i+1}^{p} \zeta_{ij} c_j + \Phi_i, \quad (i = 1, \ldots, p-1). \tag{3.17}$$

Из (2.1), (3.1) при $x = 0$ получим

$$c_i(t,0) = \psi_i(t) \quad (i = 1, \ldots, p).$$

Поэтому решение уравнения (3.16) с условием $c_p(t,0) = \psi_p(t)$ имеет вид

$$c_p(t,x) = \int_0^x \exp\big(\gamma_p(x-\tau)\big)\Phi_p(t,\tau)d\tau + \exp(\gamma_p x)\psi_p(t), \tag{3.18}$$

Затем выражение (3.18) подставляется в уравнение (3.17) при $i = p-1$, чтобы получить $c_{p-1}(t,x)$. Этот процесс повторяется для $i = p-2, p-3, \ldots, 1$, и таким образом, определяются все элементы $c_i(t,x)$.

Решение уравнения (3.17) с условием $c_i(t,0) = \psi_i(t)$ для $i = 1, \ldots, p-1$, имеет вид

$$c_i(t,x) = \int_0^x \exp\big(\gamma_i(x-\tau)\big)\bigg(\frac{\partial c_{i+1}}{\partial t}(t,\tau) + z_i(t,\tau)\bigg)d\tau + \exp(\gamma_i x)\psi_i(t),$$

где $z_i(t,\tau) = \sum\limits_{j=i+1}^{p} \zeta_{ij} c_j(t,\tau) + \Phi_i(t,\tau)$.

Рассмотрим случай $dim Ker A = n > 1$. Согласно свойству 0.3 p — это максимальная длина цепочек B-присоединенных элементов для оператора A. Операторы

$$A_j : Ker A_{j-1} \to Coker A_{j-1}$$

являются конечномерными и задаются соответствующими квадратными матрицами, т. е. являются фредгольмовыми. Таким образом, выполнено

$$\begin{aligned} Ker A_{j-1} &= Coim A_j \oplus Ker A_j, \\ Coker A_{j-1} &= Im A_j \oplus Coker A_j, \quad j = 1, 2, 3, \ldots, p-1. \end{aligned}$$

Обозначим длину B-жордановой цепочки элемента из $CoimA_j$ через p_j, имеем

$$p_j < p_{j+1}.$$

Пусть $\{v_i^j\}$ — элементы B-жордановых цепочек к элементам v_1^j ядра оператора A, т. е. выполнены соотношения

$$Av_1^j = 0, \quad Av_i^j = Bv_{i-1}^j \quad (j = 2, \dots, p_j),$$

и уравнения $Az = Bv_{p_j}$ не разрешимы относительно z. Введем следующие обозначения: $N_j = \operatorname{lin}\{v_i^j\}$, N — прямая сумма подпространств N_j, P_j — проектор из N на N_j $(j = 1, 2, \dots, n)$, $P = \sum_{j=1}^{n} P_j$. В силу (0.10) имеем

$$S_r v_i^j = 0, \quad r = 0, 1, \dots, p-1, \quad r + i < p.$$

Согласно соотношениям (3.1)–(3.4)

$$\begin{gathered} Pu(t,x) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{p_j} c_i^j(t,x)v_i^j, \quad P\psi(t) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{p_j} \psi_i^j(t)v_i^j, \\ P(A-\lambda B)^{-1}f(t,x) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{p_j} f_i^j(t,x)v_i^j, \\ P(A-\lambda B)^{-1}CPu = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{p_j}\sum_{k=1}^{p_j} a_{ik}^j c_k^j(t,x)v_i^j, \\ \text{где} \ \ a_{ik}^j = 0 \quad \forall i > k, \quad a_{ik}^j = a_{ik}^j(\lambda) \in \mathbb{C}. \end{gathered} \tag{3.19}$$

Аналогично решается задача (1.4) с условием

$$c_i^j(t,0) = \psi_i^j(t), \quad i = 1, 2, \dots, p_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

и ее решение имеет вид

$$c_{p_j}^j(t,x) = \int_0^x \exp\left(\gamma_{p_j}^j(x-\tau)\right)\Phi_{p_j}^j(t,\tau)d\tau + \exp(\gamma_{p_j}^j x)\psi_{p_j}^j(t), \quad j = 1, \dots, n \tag{3.20}$$

$$c_i^j(t,x) = \int_0^x \exp\left(\gamma_i^j(x-\tau)\right)\left(\frac{\partial c_{i+1}^j}{\partial t}(t,\tau) + z_i^j(t,\tau)\right)d\tau + \exp\left(\gamma_i^j x\right)\psi_i^j(t), \tag{3.21}$$

$$i = 1, \dots, p_j - 1, \quad j = 1, \dots, n,$$

причем выполнены соотношения

$$\begin{gathered} \lambda f_{p_j}^j = \Phi_{p_j}^j(t,x), \quad \lambda f_i^j - f_{i+1}^j = \Phi_i^j(t,x), \\ \lambda a_{rr}^j = \gamma_r^j, \quad (-\lambda a_{ik+1}^j + a_{i+1k+1}^j) = -\zeta_{ik+1}^j, \\ z_i^j(t,\tau) = \sum_{k=i+1}^{p_j} \zeta_{ik}^j c_k^j(t,\tau) + \Phi_i^j(t,\tau), \end{gathered}$$

где $\gamma_r^j, \zeta_{ik+1}^j \in \mathbb{C}$, $r = 1, \dots, p_j$, $i = 1, \dots, p_j - 1$, $k = i, \dots, p_j - 1$.

Итак, имеет место следующее утверждение.

Лемма 3.3. *Пусть оператор $P(A-\lambda B)^{-1}C$, действующий на подпространство N, является верхним треугольным оператором, $f(t,x)$ непрерывно дифференцируема $p-1$ раз по t и x, $\psi(t)$ непрерывно дифференцируема $p-1$ раз. Тогда решение задачи (1.4), (2.1) существует, единственно, не зависит от λ и определяется из соотношений (3.20), (3.21).*

Пусть оператор $P(A-\lambda B)^{-1}C$ действующий на подпространство N является верхним треугольным оператором, и $f(t,x)$ непрерывно дифференцируема $p-1$ раз по t и x, и $\psi(t)$ - непрерывно дифференцируема $p-1$ раз. Тогда решение задачи (1.4), (2.1) существует, единственно, не зависит от λ и определяется из соотношений (3.20), (3.21).

З а м е ч а н и е 3.1. Условия гладкости функций $f(t,x)$ и $\psi(x)$ можно ослабить за счет того, что от разных их компонент в N требуется разная гладкость.

4. Решение задачи в дополнительном подпространстве M

Вследствие обратимости оператора A_λ на подпространстве M, уравнение (1.5) приводится к виду:

$$\frac{\partial Qu(t,x)}{\partial t} = \frac{Q-\tilde{A_\lambda}^{-1}}{\lambda}\frac{\partial Qu(t,x)}{\partial x} + \tilde{A_\lambda}^{-1}Q(A-\lambda B)^{-1}\big(Cu+f(t,x)\big). \tag{4.1}$$

Так как $u(t,x)$ не зависит от λ и, в силу леммы 3.3, Pu не зависит от λ, из (1.2) следует, что решение Qu уравнения (1.5) в подпространстве M также не зависит от λ. Из свойств 0.3 и 0.4 получаем, что оператор $\dfrac{Q-\tilde{A_\lambda}^{-1}}{\lambda} = T_p$ в уравнении (4.1) не зависит от λ.

Лемма 4.1. *Оператор $\tilde{A_\lambda}^{-1}Q(A-\lambda B)^{-1}$ не зависит от λ.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В уравнении (4.1) слагаемые

$$\frac{\partial Qu(t,x)}{\partial t}, \quad \frac{Q-\tilde{A_\lambda}^{-1}}{\lambda}\frac{\partial Qu(t,x)}{\partial x}$$

не зависят от λ, поэтому в силу уравнения (4.1) вектор-функция

$$\tilde{A_\lambda}^{-1}Q(A-\lambda B)^{-1}\big(Cu(t,x)+f(t,x)\big)$$

не зависит от λ. Из того, что $Cu(t,x)$ и $f(t,x)$ не зависят от λ, следует что

$$\tilde{A_\lambda}^{-1}Q(A-\lambda B)^{-1}$$

также не зависит от λ. □

Согласно лемме 4.1 уравнение (4.1) может быть записано в виде

$$\frac{\partial Qu(t,x)}{\partial t} = \frac{Q-\tilde{A_\lambda}^{-1}}{\lambda}\frac{\partial Qu(t,x)}{\partial x} + h(t,x), \tag{4.2}$$

$$h(t,x) = \tilde{A_\lambda}^{-1}Q(A-\lambda B)^{-1}\big(Cu+f(t,x)\big).$$

Положим

$$\tilde{A}_\lambda^{-1} Q(A-\lambda B)^{-1}\big(CPu + f(t,x)\big) = \tilde{h}(t,x).$$

Уравнение (4.2) эквивалентно уравнению

$$\frac{\partial Qu(t,x)}{\partial t} = T_p \frac{\partial Qu(t,x)}{\partial x} + \tilde{A}_\lambda^{-1} Q(A-\lambda B)^{-1} CQu(t,x) + \tilde{h}(t,x). \tag{4.3}$$

Заметим, что если операторы $\tilde{A}_\lambda^{-1}$ и $\tilde{A}_\lambda^{-1} Q(A-\lambda B)^{-1}CQ$ коммутируют, то уравнение (4.3) разрешимо.

Лемма 4.2. *Если операторы $Q(A-\lambda B)^{-1}CQ$ и $Q(A-\lambda B)^{-1}AQ$ коммутируют, то коммутируют и операторы $\tilde{A}_\lambda^{-1}$, $\tilde{A}_\lambda^{-1} Q(A-\lambda B)^{-1}CQ$.*

Доказательство. Воспользуемся очевидным равенством

$$Q(A-\lambda B)^{-1}CQ = Q(A-\lambda B)^{-1}CQ\tilde{A}_\lambda \tilde{A}_\lambda^{-1}.$$

Из предположений доказываемой леммы следует

$$Q(A-\lambda B)^{-1}CQ = \tilde{A}_\lambda Q(A-\lambda B)^{-1}CQ\tilde{A}_\lambda^{-1}.$$

Умножив последнее уравнения на $(\tilde{A}_\lambda^{-1})^2$, получим

$$\tilde{A}_\lambda^{-1}\tilde{A}_\lambda^{-1} Q(A-\lambda B)^{-1}CQ = \tilde{A}_\lambda^{-1} Q(A-\lambda B)^{-1}CQ\tilde{A}_\lambda^{-1}.$$

□

Решение задачи в подпространстве M является решением уравнения (4.3) с условием (2.2). Введем переменные

$$\xi = t, \quad \eta = T_p t + xQ_1,$$

таким образом,

$$\frac{\partial Qu}{\partial t} = \frac{\partial Qu}{\partial \xi} + T_p \frac{\partial Qu}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial Qu}{\partial x} = \frac{\partial Qu}{\partial \eta}.$$

Используя приведенные соотношения в (4.3), получаем

$$\frac{\partial Qu}{\partial t} = HQu(t,D) + \tilde{h}(t,D), \quad D = \eta Q - T_p t, \quad H = \tilde{A}_\lambda^{-1} Q(A-\lambda B)^{-1}CQ,$$

откуда

$$Qu(t,x) = \exp(Ht)\phi(T_p t + xQ) + \int_0^t \exp\big(H(t-s)\big)\tilde{h}\big(s, T_p(t-s) + xQ\big)ds,$$

где

$$\phi(T_p t + xQ) = Qu(0,x).$$

Решение задачи (4.3), (2.2) опирается на спектральные свойства линейного ограниченного оператора (см. [17]). Пусть Γ — замкнутый спрямляемый контур, окружающий спектр оператора $xQ + (t-s)T_p$, $0 \leqslant s \leqslant t$. Справедливо следующее утверждение.

Лемма 4.3. *При выполнении предположений леммы 4.2 решение* $Qu(t,x)$ *задачи* (1.5), (2.2) *с аналитическими вектор-функциями* $\phi(x)$ *и* $\tilde{h}(t,x)$ *существует. Решение имеет вид*

$$\begin{aligned} Qu(t,x) = &-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} \exp(Ht)\big(tT_p + (x-\mu)Q\big)^{-1}\phi(\mu)\,d\mu \\ &-\frac{1}{2\pi i}\int_0^t \oint_{\Gamma} \exp\big(H(t-s)\big)\big((t-s)T_p + (x-\mu)Q\big)^{-1}\tilde{h}(s,\mu)\,ds\,d\mu. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Из результатов, полученных в предыдущих пунктах, следует, что справедлива следующая теорема.

Теорема 4.1. *Пусть выполнено* $P(A-\lambda B)^{-1}CQ = 0$, *операторы* $Q(A-\lambda B)^{-1}CQ$ *и* $Q(A-\lambda B)^{-1}AQ$ *коммутируют, оператор* $P(A-\lambda B)^{-1}CP$ *является верхним треугольным оператором,* $\psi(t)$, $f(t,x)$ *— аналитические вектор-функции по* t, $\phi(x)$, $f(t,x)$ *— аналитические вектор-функции по* x. *Тогда решение* $u(t,x)$ *уравнения* (0.1) *с условиями* (2.1), (2.2) *существует, единственно и определяется формулами* (1.2), (3.19), (3.20), (3.21) *и* (4.4).

References

[1] S. P. Zubova, A. H. Mohamad, “Analytical solution for descriptor system in partial differential equations”, *Computational Methods for Differential Equations (CMDE)*, **9**:2 (2021), 467–479.

[2] Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*, ФИЗМАТЛИТ, М., 2010. [F. R. Gantmacher, *The Theory of Matrices*, FIZMATLIT, M., 2010 (In Russian)].

[3] С. П. Зубова, К. И. Чернышов, “О линейном дифференциальном уравнении с фредгольмовым оператором при производной”, *Дифференциальные уравнения и их применение*, 1976, № 14, 21–39; англ. пер.:S. P. Zubova, K. I. Chernyshov, “On the linear differential equation with a Fredholm operator at a derivative”, *Differential Equations and Their Application*, 1976, № 14, 21–39 (In Russian).

[4] С. П. Зубова, *Свойства возмущённого фредгольмовского оператора. Решение дифференциального уравнения с фредгольмовским оператором при производной*, Воронеж, Воронежский гос. ун–т, 1991, 17 с. [S. P. Zubova, *Properties of the Perturbed Fredholm Operator. Solution of a Differential Equation with a Fredholm Operator at the Derivative*, Voronezh State University, 1991 (In Russian), 17 pp.]

[5] *Математическая энциклопедия.* Т. 3, ред. И. М. Виноградов, Советская энциклопедия, Москва, 1982, 592 с. [*Encyclopedia of Mathematics.* V. 3, ed. I. M. Vinogradov, Publishing House “Soviet Encyclopedia”, Moscow, 1982 (In Russian), 592 pp.]

[6] С. П. Зубова, “Решение однородной задачи Коши для уравнения с нетеровым оператором при производной”, *Доклады АН*, **428**:4 (2009), 444–446. [S. P. Zubova, “Solution of the homogeneous Cauchy problem for an equation with a Fredholm operator at the derivative”, *Reports of the Academy of Sciences*, **428**:4 (2009), 444–446 (In Russian)].

[7] С. П. Зубова, *Сингулярное возмущение линейных дифференциальных уравнений, неразрешенных относительно производной*, дисс. … канд. физ.-матем. наук, Воронеж, 1973. [S. P. Zubova, *Singular Perturbation of Linear Differential Equations Unsolved with Respect to the Derivative*, diss. … cand. phys.-math. sciences, Voronezh, 1973 (In Russian)].

[8] B. L. Stevens, F. L. Lewis, *Aircraft Control and Simulation*, Wiley–Interscience, New York, 2004, 640 pp.

[9] A. Kumar, P. Daoutidis, “Feedback control of nonlinear differential-algebraic equation systems”, *American Institute of Chemical Engineers*, **41**:3 (2018), 619–636.

[10] D. G. Luenberger , A. Arbel, “Singular dynamic Leontief systems”, *Econometrica*, **45**:4 (1977), 991–995.

[11] M. Bodestedt, C. Tischendorf, “PDAE models of integrated circuits and index analysis”, *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*, **13**:1 (2007), 1–17.

[12] О. В. Бормотова, В. Ф. Чистяков, “О методах численного решения и исследования систем не типа Коши-Ковалевской”, *Журн. вычисл. матем. и мат. физики.*, **44**:8 (2004), 1380–1387; англ. пер.:O. V. Bormotova, V. F. Chistyakov, “On methods of numerical solution and study of systems not of the Cauchy-Kovalevskaya type”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **44**:8 (2004), 1306–1313.

[13] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов*, Наука, М., 1965. [I. Ts. Gokhberg, M. G. Kerin, *Introduction to the Theory of Linear Non-self-Adjoint Operators*, Nauka Publ., Moscow, 1965 (In Russian)].

[14] Ф. В. Аткинсон, “Нормальная разрешимость линейных уравнений в нормированных пространствах”, *Математический сборник*, **28(70)**:1 (1951), 3–14. [F. V. Atkinson, “Normal solvability of linear equations in normed spaces”, *Mathematical Collection*, **28(70)**:1 (1951), 3–14 (In Russian)].

[15] А. Д. Баев, С. П. Зубова, В. И. Усков, “Решение задач для дескрипторных уравнений методом декомпозиции”, *Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика*, 2013, № 2, 134–140. [A. D. Baev, S. P. Zubova, V. I. Uskov, “Solving problems for descriptor equations by the decomposition method”, *Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, **28(70)**:2 (2013), 134–140 (In Russian)].

[16] С. П. Зубова, В. И. Усков, “Решение задачи Коши для дескрипторного уравнения в случае двухшаговой декомпозиции”, *Вестник ИЖГТУ имени М. Т. Калашникова. Серия: математика*, 2015, № 1(65), 120–122. [S. P. Zubova, V. I. Uskov, “Solving the Cauchy problem for descriptor equation in case of two-step decomposition”, *Bulletin of Kalashnikov ISTu. Series: Mathematics*, 2015, № 1(65), 120–122 (In Russian)].

[17] С. Г. Крейн, *Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве*, Наука, М., 1967. [S. G. Kerin, *Linear Differential Equations in Banach Space*, Nauka Publ., Moscow, 1967 (In Russian)].

Информация об авторе

Мохамад Абдулфтах Хосни, аспирант. Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация. E-mail: abdulftah.hosni90@gmail.com
ORCID: http://orcid.org/0000-0003-1087-0512

Поступила в редакцию 09.04.2021 г.
Поступила после рецензирования 01.06.2021 г.
Принята к публикации 10.06.2021 г.

Information about the author

Abdulftah H. Mohamad, Post-Graduate Student. Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation. E-mail: abdulftah.hosni90@gmail.com
ORCID: http://orcid.org/0000-0003-1087-0512

Received 09.04.2021
Reviewed 01.06.2021
Accepted for press 10.06.2021